

Rappel:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f, g \in C^1(D)$ tq $E = g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ et $\forall x \in E$,
 $\nabla g(x) \neq 0$. Alors, $\min_{x \in E} f(x)$ et $\max_{x \in E} f(x)$

se trouvent parmi les pts stationnaires de $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$

Exemple 6.14 (suite)

(i) $n=2$ déjà fait ✓

(ii) $n=3$ Soit $f(x, y, z) = x + y + z$. Trouver min & max de f
 sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$L(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: 1 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

Si $\lambda = 0$, (1), (2), (3) $\Rightarrow 1 = 0$ $\nexists$
 $\Rightarrow \lambda \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}: 1 + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$(2) \rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}: 1 + 2\lambda z = 0 \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow z = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}: x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow \frac{3}{4\lambda^2} - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\max_{(x,y,z) \in g^{-1}(\{0\})} f(x,y,z) = \max \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} = \sqrt{3}$$

$$\min_{(x,y,z) \in g^{-1}(\{0\})} f(x,y,z) = \min \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} = -\sqrt{3}$$

Généralisation / méthode 6.15 Méthode des multiplicateurs
de Lagrange, plusieurs
contraintes:

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(D)$

$$E = \{x \in D : \forall 1 \leq j \leq m, g_j(x) = 0\}$$

Supposons $E \neq \emptyset$, $\forall x \in E$, $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$ sont lin. indep.

Alors, si $\tilde{x} \in E$ est un extremum local de f sur E ,
 $\exists \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m \in \mathbb{R}$ tq $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$ est un point
stationnaire de $L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$

(On va essentiellement utiliser pour $n=3, m=2$)

Exemple 6.16

Soit $f(x, y, z) = x + y + z$. On cherche un min & max de
 f sous les contraintes $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x - y = 1$.

Soit $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x - y - 1)$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 1 + 2\lambda x + \mu = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 1 + 2\lambda y - \mu = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} : x - y - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} : 1 + 2\lambda z = 0 \quad (3)$$

Si $\lambda = 0$, (3) $\rightarrow 1 = 0$ ~~z~~ $\Rightarrow \lambda \neq 0$.

$$(1) \rightarrow x = -\frac{1+\mu}{2\lambda}, \quad (2) \rightarrow y = \frac{-1+\mu}{2\lambda}, \quad (3) \rightarrow z = -\frac{1}{2\lambda}.$$

$$(5) \rightarrow \frac{-1-\mu}{2\lambda} + \frac{1-\mu}{2\lambda} = 1 \Rightarrow -\frac{\mu}{\lambda} = 1 \Rightarrow \mu = -\lambda$$

$$(1) \rightarrow x = -\frac{\lambda-1}{2\lambda}, \quad (2) \rightarrow y = -\frac{\lambda+1}{2\lambda}.$$

$$(4) \rightarrow \left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\lambda^2 + 3}{4\lambda^2} = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ or } \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$(1) \rightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(3) \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}, (1) \rightarrow x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(3) \rightarrow z = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$f(x, y, z) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow$ max de f sous les contraintes est $\sqrt{\frac{3}{2}}$

min de f sous les contraintes est $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

§6.3 Étude globale

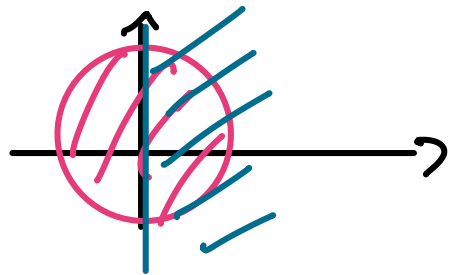
Contexte : $E \subseteq \mathbb{R}^n$, fermé, borné, $f \in C^0(E)$

on suit trouver les candidats à être min ou max de f dans $\text{int}(E)$. On veut trouver min/max de f sur ∂E .

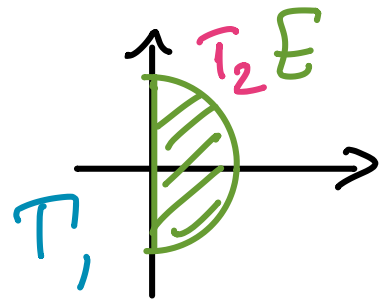
Exemple 6.17 Méthode par substitution / paramètres au bord

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y + 2x$



$\leadsto$



$$\partial E = T_1 \cup T_2$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1]\}$$

$g_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_1(y) = f(0, y) = y$

$g_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_2(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y)$
 $= y + 2\sqrt{1-y^2}$

On sait trouver min/max de g_i !

$g_1(y) = y, y \in [-1, 1]$,

pts stationnaires: $g_1'(y) = 1 \rightarrow$ pas de pts stationnaires.

pts sur le bord $g_1(-1) = -1, g_1(1) = 1$

$g_2(y) = y + 2\sqrt{1-y^2}, y \in [-1, 1]$.

pts stationnaires: $g_2'(y) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}$

$$g_2'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4y^2}{1-y^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(En vrai, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est l'unique point stationnaire,
mais vu que $-\frac{1}{\sqrt{5}} \in [-1, 1]$, ça n'est pas un
problème de le garder)

$$g_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad g_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$$

pts sur le bord: $g_2(-1) = -1$, $g_2(1) = 1$

Conclusion: $\max_{(x,y) \in \partial E} f(x,y) = \max \{-1, 1, \frac{3}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\} = \sqrt{5}$

$$\min_{(x,y) \in \partial E} f(x,y) = \min \{-1, 1, \frac{3}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\} = -1$$

D

Exemple 6.17 Méthode par mult. de Lagrange.

Soit $E = \overline{B}(0,0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y + 2x$.

$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = g^{-1}(\{0\})$ où $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x,y,\lambda) = y + 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: 2 + 2\lambda x = 0 \quad (1) \quad y \cdot (1) - x \cdot (2) : 2y - x = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: 1 + 2\lambda y = 0 \quad (2) \quad (3) \rightarrow 4y^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}: x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \min_{(x,y) \in \partial E} f(x,y) = -\sqrt{5}, \quad \max_{(x,y) \in \partial E} f(x,y) = \sqrt{5}$$

Méthode 6.18 Étude globale.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ fermé, borné, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continu

Par la prop. 6.2, f prend son min & son max sur E .

Étape 1: On détermine tous les points stationnaires de f dans $\text{int } E$.

Étape 2 On détermine min & max sur ∂E .

Étape 3 :

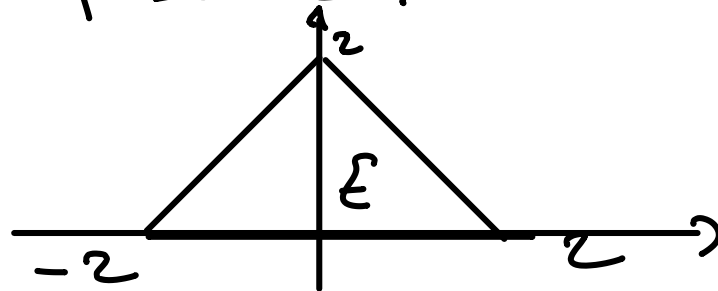
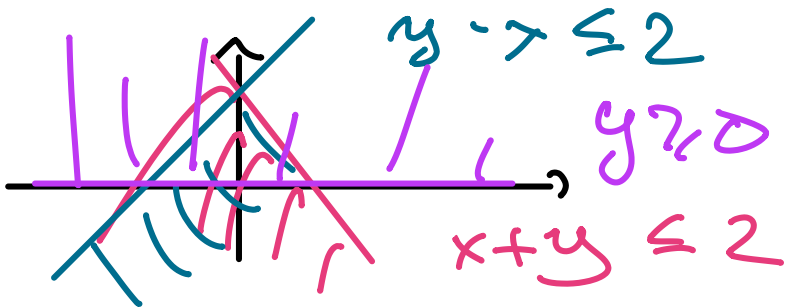
$$\max_{x \in E} f(x) = \max \left(\{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n + E, \nabla f(x) = 0 \} \cup \{ \max_{x \in \partial E} f(x) \} \right)$$

$$\min_{x \in E} f(x) = \min \left(\{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n + E, \nabla f(x) = 0 \} \cup \{ \min_{x \in \partial E} f(x) \} \right)$$

Exemple 6.14 :

Soit $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y - x \leq 2, x + y \leq 2\}$

Trouver min & max de f sur E .



pts stationnaires dans $\text{int } E$

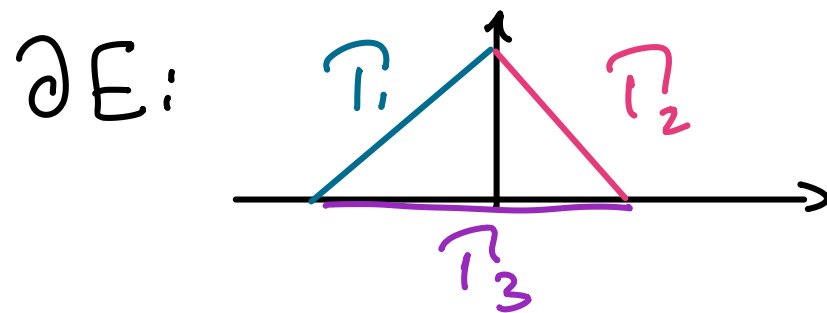
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \leadsto x = 0 \text{ ou } y = 0$$

$x = 0$ $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } +1$
 $(0, -1) \notin E \rightarrow \text{on l'oublie!}$
 $(0, 1) \in E, \quad f(0, 1) = 0$

$y = 0$ $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } +1$
 $(-1, 0) \in \partial E$ (pas obligé) $f(-1, 0) = \frac{2}{3}$

$(1,0) \in \partial E$ (pas obligé) $f(1,0) = -\frac{2}{3}$



$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y-x=2, x+y \leq 2\}$$

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0], y = x+2\}$$

$$y \geq 0$$

$$x+y \leq 2$$

$$x+2 \geq 0$$

$$2x+2 \leq 2$$

$$\leftarrow x \geq -2$$

$$\leftarrow x \leq 0$$

$$g_1 : [-2,0] \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = f(x, x+2) = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 3x$$

$$g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \in [-2,0], g_1\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \in [-2,0], g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$g_1(-2) = -\frac{2}{3}, g_1(0) = 0$$